Sur les lois de chaînes de Markov duales sur Z

Jean-Marc Derrien, Frédérique Plantevin

Sur les lois de chaînes de Markov duales sur $\mathbb{Z}$

Jean-Marc Derrien et Frédérique Plantevin

Laboratoire de Mathématiques, Université de Brest, UEB
6, avenue Victor Le Gorgeu, 29285 Brest, France

28 Septembre 2009

Résumé : On établit une formule de correspondance entre les lois de chaînes de Markov «duales» sur $\mathbb{Z}$. Cette formule apporte une contribution à l'étude des marches aléatoires en milieu aléatoire stationnaire.

Mots-clés : Chaînes de Markov, dualité, conductances et résistances, marches aléatoires en milieu aléatoire stationnaire.

Abstract : We establish a correspondence formula between the laws of *dual* Markov chains on $\mathbb{Z}$. This formula contributes to the study of random walks in stationary random environments.

Keywords : Markov chains, duality, conductances and resistances, random walks in stationary random medium.

1. Introduction Dans [4], les auteurs montrent que la loi du temps de retour en 0 pour une chaîne de Markov de naissances et de morts (sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels) s'exprime aisément à l'aide de la loi d'une chaîne de Markov «duale» obtenue par interversion en chaque site de la probabilité de faire un pas vers la droite avec celle de faire un pas vers la gauche.

Considérer de telles chaînes de Markov «duales» garde un sens lorsque l'on s'intéresse à des chaînes de Markov sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Elles apparaissent naturellement dans différentes situations comme dans l'application détaillée au paragraphe 3 ci-dessous ou encore dans [3].

Dans cette note, on montre qu'il existe une relation simple entre la loi d'une chaîne de Markov aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$ et la loi de la chaîne «duale» associée (théorème 1).

Cette relation s'applique en particulier aux chaînes de Markov sur le réseau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs dont les probabilités de transition aux plus proches voisins sont proportionnelles à des conductances fixées sur les arêtes du réseau. Lorsque la famille de conductances est obtenue comme réalisation d'une suite stationnaire de variables aléatoires strictement positives, on montre par exemple que, à chaque instant et en moyenne relativement à l'aléa des conductances, la moyenne quadratique d'une telle chaîne de Markov coïncide avec celle de la chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont proportionnelles aux résistances (corollaire 2).

2. Chaînes de Markov duales sur $\mathbb{Z}$ et énoncé du résultat principal

Dans la suite, les chaînes de Markov considérées sont toutes des chaînes de Markov homogènes aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$.

Désignons par $(S_n)_{n\geq 0}$ une telle chaîne de Markov et notons p_k, $k \in \mathbb{Z}$, la probabilité pour (S_n) de se déplacer de k vers $k+1$:

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbb{P}[S_{n+1} = k+1 \mid S_n = k] \\ &= 1 - \mathbb{P}[S_{n+1} = k-1 \mid S_n = k] \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$

La probabilité de transition de (S_n) est caractérisée par l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : \mathbb{Z} & \longrightarrow & [0,1] \\ k & \longmapsto & p_k \end{array} \ .$$

Dans cette note, on appelle chaîne de Markov *duale* de (S_n) la chaîne de Markov (S_n^*) sur $\mathbb{Z}$ dont la probabilité de transition est caractérisée par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^* : \mathbb{Z} & \longrightarrow & [0,1] \\ k & \longmapsto & p_k^* := 1 - p_k \end{array} \ .$$

Notre but est d'établir une formule de correspondance entre la loi de (S_n) et celle de (S_n^*) (théorème 1 ci-dessous) et de l'appliquer aux marches aléatoires en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (paragraphe 6).

Théorème 1 *Avec les notations précédentes, pour tout entier naturel n et tout élément l de $\mathbb{Z}_+$, on a l'égalité*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[S_n^* = -l \mid S_0^* = 0] \\ = \ &\mathbb{P}[S_n = 1 \mid S_0 = -l+1] + \Big(\mathbb{P}[S_n > 1 \mid S_0 = -l+1] - \mathbb{P}[S_n > -1 \mid S_0 = -l-1]\Big) \ . \end{aligned}$$

Remarques

1. Les trois probabilités qui apparaissent dans le second membre de l'égalité précédente correspondent respectivement aux probabilités

$$\mathbb{P}[S_n = l \mid S_0 = 0] \ , \ \mathbb{P}[S_n > l \mid S_0 = 0] \text{ et } \mathbb{P}[S_n > l-2 \mid S_0 = -2]$$

pour la famille de probabilités de transition décalée

$$\theta^{-l+1}\mathcal{P} : k \in \mathbb{Z} \mapsto p_{k-l+1} \in [0,1] \ .$$

2. On obtient symétriquement que, l étant toujours dans $\mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[S_n^* = l \mid S_0^* = 0] \\ = \ &\mathbb{P}[S_n = -1 \mid S_0 = l-1] + (\mathbb{P}[S_n < -1 \mid S_0 = l-1] - \mathbb{P}[S_n < 1 \mid S_0 = l+1]) \\ = \ &\theta^{l-1}\mathbb{P}[S_n = -l \mid S_0 = 0] + \big(\theta^{l-1}\mathbb{P}[S_n < l \mid S_0 = 0] - \theta^{l+1}\mathbb{P}[S_n < l \mid S_0 = 0]\big) \end{aligned}$$

(avec des notations qui sont précisées à la fin du paragraphe 5).

3. Premières constatations sur un exemple

Intéressons-nous à la probabilité que $(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{10})$ emprunte un chemin particulier

$$\Gamma := (0, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2)\ .$$

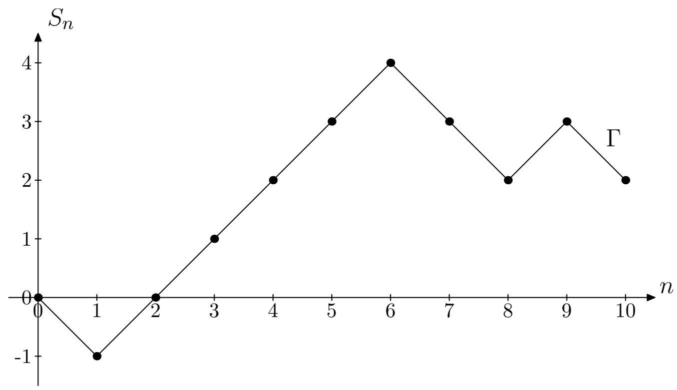

Figure 1 : Représentation du chemin Γ

On a

$$\mathbb{P}[(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{10}) = \Gamma] = q_0\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ q_4\ q_3\ p_2\ q_3\ .$$

En développant ce dernier produit relativement à chaque facteur $q_k = 1 - p_k$, on obtient une somme de seize termes

$$\begin{array}{rccc}
\Sigma\ := & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ 1\ p_2\ 1 & + & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ 1\ p_2\ (-p_3) \\
+ & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ (-p_3)\ p_2\ 1 & + & p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ (-p_3)\ p_2\ (-p_3) \\
+ & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ 1\ p_2\ 1 & + & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ 1\ p_2\ (-p_3) \\
+ & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ (-p_3)\ p_2\ 1 & + & 1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ (-p_3)\ p_2\ (-p_3) \\
+ & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ 1\ p_2\ 1 & + & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ 1\ p_2\ (-p_3) \\
+ & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ (-p_3)\ p_2\ 1 & + & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ (-p_3)\ p_2\ (-p_3) \\
+ & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ 1\ p_2\ 1 & + & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ 1\ p_2\ (-p_3) \\
+ & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ (-p_3)\ p_2\ 1 & + & (-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ (-p_3)\ p_2\ (-p_3)\ .
\end{array}$$

L'idée consiste à appliquer aux termes de Σ une succession de transformations de manière à faire apparaître les probabilités que $(S^*_n)_{0 \le n \le 10}$ emprunte des chemins particuliers.

Illustrons dans un premier temps ces transformations avec le treizième terme de Σ :

$$(-p_0)\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ (-p_4)\ 1\ p_2\ 1\ .$$

On commence par prendre en compte l'ordre dans lequel apparaissent les facteurs de ce produit en considérant le 10-uplet

$$\xi := (-p_0\ ,\ p_{-1}\ ,\ p_0\ ,\ p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ -p_4\ ,\ 1\ ,\ p_2\ ,\ 1)\ .$$

On effectue alors une permutation miroir :

$$(1\ ,\ p_2\ ,\ 1\ ,\ -p_4\ ,\ p_3\ ,\ p_2\ ,\ p_1\ ,\ p_0\ ,\ p_{-1}\ ,\ -p_0)\ ,$$

suivie d'un décalage cyclique des signes «-» vers la gauche en ne tenant pas compte des termes égaux à «1» :

$$(1\ ,\ -p_2\ ,\ 1\ ,\ p_4\ ,\ p_3\ ,\ p_2\ ,\ p_1\ ,\ p_0\ ,\ -p_{-1}\ ,\ p_0) =: \eta\ .$$

Considérant les probabilités de transition de la chaîne duale (S_n^*), ce 10-uplet η met en évidence le chemin

$$\Gamma^* := (1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ -1)\ .$$

En effet, l'expression du produit

$$\begin{aligned} & q_1\ q_2\ q_3\ p_4\ p_3\ p_2\ p_1\ p_0\ q_{-1}\ p_0 \\ = \ & \mathbb{P}[(S_0^*\ ,\ S_1^*\ ,\ S_2^*\ ,\ S_3^*\ ,\ S_4^*\ ,\ S_5^*\ ,\ S_6^*\ ,\ S_7^*\ ,\ S_8^*\ ,\ S_9^*\ ,\ S_{10}^*) = \Gamma^*] \end{aligned}$$

développé relativement aux quantités $q_k = 1 - p_k$ contient le terme

$$1\ (-p_2)\ 1\ p_4\ p_3\ p_2\ p_1\ p_0\ (-p_{-1})\ p_0\ ,$$

produit des coordonnées de η.

Les mêmes transformations que ci-dessus appliquées au premier terme de Σ :

$$1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ 1\ p_2\ 1$$

mènent au 10-uplet $(1\ ,\ p_2\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ p_3\ ,\ p_2\ ,\ p_1\ ,\ p_0\ ,\ p_{-1}\ ,\ 1)$,
qui est cette fois associé au chemin $\Gamma_1^* := (1\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ -2\ ,\ -1)$.

Pour le deuxième terme de Σ :

$$1\ p_{-1}\ p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ 1\ 1\ p_2\ (-p_3)\ ,$$

on obtient le 10-uplet $(p_3\ ,\ p_2\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ p_3\ ,\ p_2\ ,\ p_1\ ,\ p_0\ ,\ -p_{-1}\ ,\ 1)$,
qui est associé au chemin $\Gamma_2^* := (3\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

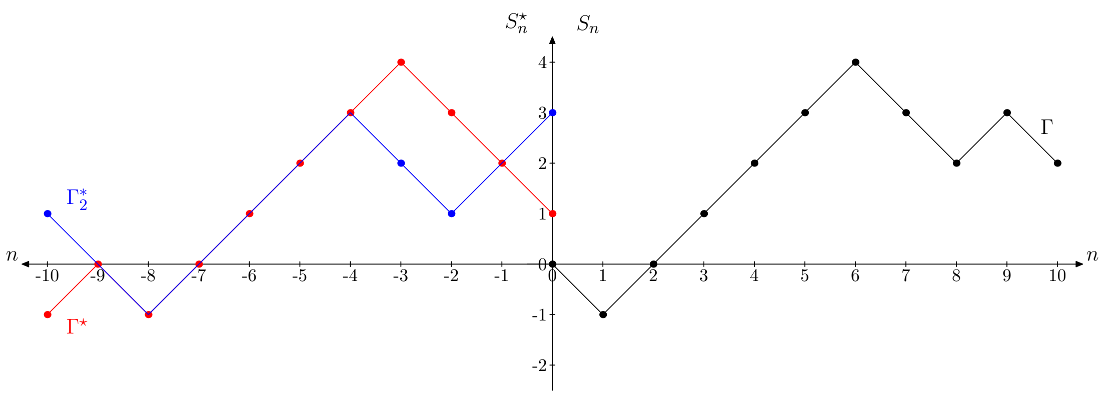

Figure 2 : Représentation des chemins Γ, Γ^* et Γ_2^*

Poursuivant ainsi on remarquerait que

1. chaque terme de Σ ainsi transformé est associé à un chemin Γ_i^*, $1 \leq i \leq 16$,
2. chacun des chemins Γ_i^* part de 1 et aboutit à -1, ou bien part de 3 et aboutit en 1,
3. pour tous i, j tels que $\Gamma_i^* \neq \Gamma_j^*$, le chemin Γ_i^* n'est pas un translaté de Γ_j^*.
4. en considérant tous les termes de Σ auxquels on associe un même chemin Γ_i^* et en faisant la somme des produits des coordonnées de leurs transformés, on ne récupère qu'«en partie» la probabilité

$$\mathbb{P}[(S_0^*\ ,\ S_1^*\ ,\ S_2^*\ ,\ S_3^*\ ,\ S_4^*\ ,\ S_5^*\ ,\ S_6^*\ ,\ S_7^*\ ,\ S_8^*\ ,\ S_9^*\ ,\ S_{10}^*) = \Gamma_i^*]\ .$$

En particulier, il résulte des points 1 et 2 que l'on peut s'arranger pour que les chemins Γ_i^* obtenus partent tous de 0 et aboutissent tous en -2. Il suffit pour cela d'appliquer aux termes de Σ une transformation supplémentaire consistant en un décalage des indices des p_k de «-1» ou de «-3».

Si maintenant on considère tous les chemins de longueur 10 qui partent de 0 et qui aboutissent en 2, et que l'on décompose la probabilité que (S_n) les emprunte en sommes Σ, et qu'enfin on transforme comme ci-dessus chacun des termes de ces sommes Σ, on peut alors reconstituer exactement la probabilité

$$\mathbb{P}[S_{10}^* = -2 \mid S_0^* = 0]\ .$$

Le paragraphe suivant systématise ces remarques.

4. Notations et premiers résultats

Fixons (S_n) une chaîne de Markov aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$ dont la probabilité de transition est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : \mathbb{Z} & \longrightarrow & [0,1] \\ k & \longmapsto & p_k \end{array}\ .$$

Cette famille de réels p_k, $k \in \mathbb{Z}$, est également parfois considérée dans la suite comme une famille dénombrable d'indéterminées encore notée $\mathcal{P}$. Nous laissons au lecteur le soin de distinguer entre l'un ou l'autre usage.

Donnons-nous un entier naturel non nul n et un entier relatif l. Notre objectif est d'établir une relation entre la loi de S_n^* et la probabilité

$$\mathbb{P}[S_n = l \mid S_0 = 0]$$

pour (S_n) d'atteindre l à l'instant n lorsque l'on est parti de 0.

Dans la suite, on suppose que les entiers n et l ont même parité puisque dans le cas contraire la probabilité qui nous intéresse est nulle. Pour fixer les idées, nous faisons aussi l'hypothèse que l est positif ou nul.

Nous allons procéder de manière combinatoire et considérer, comme dans le paragraphe précédent, les probabilités pour les chaînes (S_n) et (S_n^*) d'emprunter des chemins particuliers. Pour cela, nous devons commencer par introduire plusieurs notations.

Désignons par $\mathcal{C}_0^{(n)}$ l'ensemble des chemins de longueur n issus de 0 dont chaque pas vaut -1 ou $+1$:

$$\mathcal{C}_0^{(n)} := \{\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \gamma_0 = 0\ ,\ |\gamma_{i+1} - \gamma_i| = 1\ ,\ i = 0, 1, \ldots, n-1\}\ ,$$

et, s étant un entier relatif donné, notons $\mathcal{C}_{0,s}^{(n)}$ l'ensemble des chemins précédents qui aboutissent en s :

$$\mathcal{C}_{0,s}^{(n)} := \{\Gamma \in \mathcal{C}_0^{(n)} \mid \gamma_n = s\}\ .$$

Nous introduisons successivement

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{-p_k, 1, p_k\}\ ,$$

et, pour $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ dans $\mathcal{C}_0^{(n)}$,

$$\mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{P}) := \left\{ \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \xi_i = p_{\gamma_i} & \text{si } \gamma_{i+1} = \gamma_i + 1 \\ \xi_i \in \{1, -p_{\gamma_i}\} & \text{si } \gamma_{i+1} = \gamma_i - 1 \end{array} \right\}\ .$$

Ainsi, si l'on pose $p_{k,k+1} := p_k$ et $p_{k,k-1} := q_k$, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(S_0, S_1,\ \ldots\ ,\ S_n) = \Gamma] &= p_{\gamma_0,\gamma_1}\ p_{\gamma_1,\gamma_2}\ \ldots\ p_{\gamma_{n-1},\gamma_n} \\ &= \sum_{\xi \in \mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \xi_i \end{aligned}$$

(cette dernière égalité revenant simplement à développer le produit $p_{\gamma_0,\gamma_1}\ p_{\gamma_1,\gamma_2}\ \ldots\ p_{\gamma_{n-1},\gamma_n}$ par rapport à chaque facteur $q_k = 1 - p_k$).

En désignant par $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$ l'union disjointe des $\mathcal{D}_\Gamma(\mathcal{P})$ lorsque Γ parcourt $\mathcal{C}_{0,l}^{(n)}$, on obtient donc la proposition suivante.

Proposition 1 *Avec les notations introduites ci-dessus, on a l'égalité*

$$\mathbb{P}[S_n = l \mid S_0 = 0] = \sum_{\xi \in \mathcal{D}(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \xi_i\ .$$

De la même manière, il vient

$$\mathbb{P}[S_n^* = -l \mid S_0^* = 0] = \sum_{\eta \in \mathcal{D}^*(0,-l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \eta_i$$

lorsque $\mathcal{D}^*(0, -l, n, \mathcal{P})$ *désigne l'ensemble*

$$\bigcup_{\Gamma \in \mathcal{C}_{0,-l}^{(n)}} \left\{ \eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \eta_i \in \{1, -p_{\gamma_i}\} & si\ \gamma_{i+1} = \gamma_i + 1 \\ \eta_i = p_{\gamma_i} & si\ \gamma_{i+1} = \gamma_i - 1 \end{array} \right\}\ .$$

On note à présent

$$i(\xi) := \max\{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid \xi_i \neq 1\} \ , \quad \xi \in \mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P}) \ ,$$

et

$$\mathcal{D}_+(0, l, n, \mathcal{P}) := \left\{ \xi \in \mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P}) \mid \xi_{i(\xi)} \in \{p_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \right\} .$$

Ainsi, l'unique chemin $\Gamma \in \mathcal{C}_{0,l}^{(n)}$ auquel est associé par construction un élément ξ de $\mathcal{D}_+(0, l, n, \mathcal{P})$ croît entre les instants $i(\xi)$ et $i(\xi)+1$ et ne cesse ensuite de décroître jusqu'en l. Il en résulte que

$$\gamma_{i(\xi)} = -i(\xi) + n + l - 2 \ .$$

De plus, comme Γ comprend exactement $(n-l)/2$ «descentes» en tout, on a nécessairement

$$i(\xi) \geq n - \frac{n-l}{2} - 1 = \frac{n+l}{2} - 1 \ .$$

La proposition suivante donne une interprétation probabiliste de l'ensemble $\mathcal{D}_+(0, l, n, \mathcal{P})$.

Proposition 2 *Avec les notations introduites ci-dessus, on a l'égalité*

$$\mathbb{P}[S_n \geq l \mid S_0 = 0] = \sum_{\xi \in \mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \xi_i \ .$$

Preuve Soit $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ un chemin, élément de $\mathcal{C}_0^{(n)}$, tel que $\gamma_n \geq l$.

Commençons par remarquer que, comme les pas de γ sont égaux à -1 ou à $+1$, la fonction $i \mapsto i + \gamma_i$ est croissante au sens large avec des sauts valant 0 ou bien $+2$. Sa valeur initiale $0 + \gamma_0 = 0$ est inférieure ou égale à $n + l - 2$ et sa valeur finale $n + \gamma_n$ est supérieure ou égale à $n + l$. Il en résulte l'existence d'un unique instant $i_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que

$$i_0 + \gamma_{i_0} = n + l - 2 \quad \text{et} \quad (i_0 + 1) + \gamma_{i_0+1} = n + l \ .$$

De plus, les sauts de $i \mapsto i + \gamma_i$ ne dépassant pas la valeur $+2$, i_0 doit au moins être égal à $(n + l - 2)/2$.

On déduit de ces considérations que

$$\mathbb{P}[S_n \geq l \mid S_0 = 0] = \sum_{i_0=(n+l)/2-1}^{n-1} \mathbb{P}[i_0 + S_{i_0} = (n + l - 2) \ , \ (i_0 + 1) + S_{i_0+1} = n + l \mid S_0 = 0] \ .$$

En utilisant l'homogénéité de (S_n) puis la proposition 1, on obtient alors

$$\mathbb{P}[S_n \geq l \mid S_0 = 0] \ = \ \sum_{i_0=(n+l)/2-1}^{n-1} \mathbb{P}[S_{i_0} = -i_0 + (n + l - 2) \mid S_0 = 0] \, p_{-i_0+n+l-2}$$

$$= \sum_{i_0=(n+l)/2-1}^{n-1} \sum_{\xi\in\mathcal{D}(0,-i_0+n+l-2,i_0,\mathcal{P})} \left(\prod_{j=0}^{i_0-1} \xi_j\right) p_{-i_0+n+l-2}$$
$$= \sum_{\xi\in\mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \xi_i \ ;$$

compte tenu des remarques précédant l'énoncé de la proposition.

•

Pour r dans $\mathbb{Z}$, on introduit à présent une opération de décalage sur $\mathcal{P}$ en posant

$$\theta^r(p_k) := p_{k+r}\ ,\ \theta^r(1) := 1\ ,\ \theta^r(-p_k) := -p_{k+r}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\ ,$$

et une autre sur $\mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ par

$$\theta^r(\xi) := (\theta^r(\xi_0)\ ,\ \theta^r(\xi_1)\ ,\ \dots\ ,\quad \theta^r(\xi_{n-1}))\ ,\quad \xi = (\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\in\mathcal{E}(\mathcal{P})^n\ .$$

On définit également trois applications

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 : \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$$

en posant

$$\varphi_1(\xi) := \begin{cases} \theta^{-l+1}(\xi) & \text{si } \xi\in\mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P}) \\ \theta^{-l-1}(\xi) & \text{sinon} \end{cases}\ ,$$

$$\varphi_2\left((\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\right) := (\xi_{n-1},\dots,\xi_1,\xi_0)\ ,$$

et, pour tout $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$,

$$(\varphi_3(\xi))_i := \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i = 1 \\ \operatorname{sign}\left(\xi_{\mathrm{succ}_\xi(i)}\right)\ |\xi_i| & \text{si } \xi_i \neq 1 \end{cases}\ ,$$

où l'on désigne par $\mathrm{succ}_\xi(i)$ l'indice de la coordonnée de ξ distincte de 1 qui «suit cycliquement» la coordonnée ξ_i. Plus précisément, si $\{j\in\{i+1,i+2,\dots,n-1\}\mid \xi_j\neq 1\}$ est non vide,

$$\mathrm{succ}_\xi(i) := \min\{j\in\{i+1,i+2,\dots,n-1\}\mid \xi_j\neq 1\}\ ,$$

et, dans le cas contraire,

$$\mathrm{succ}_\xi(i) := \min\{j\in\{0,1,\dots,i\}\mid \xi_j\neq 1\}\ .$$

On remarquera au passage que les applications φ_1 et φ_3 laissent invariantes les coordonnées des éléments ξ qui sont égales à 1.

L'application composée $\Phi := \varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1$ permet d'exprimer une première correspondance entre les lois de S_n et de S_n^*.

Proposition 3 *Pour toute famille $\mathcal{P} = (p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'indéterminées, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout l dans $\mathbb{Z}_+$, la restriction de l'application Φ à $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$ est une bijection entre les ensembles $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$ et $\mathcal{D}^*(0, -l, n, \mathcal{P})$ de la proposition 1.*

Preuve Comme les ensembles $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$ et $\mathcal{D}^*(0, -l, n, \mathcal{P})$ ont même cardinal, il suffit de montrer que l'application $\Phi : \mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P}) \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ est injective et est à valeurs dans $\mathcal{D}^*(0, -l, n, \mathcal{P})$.

L'injectivité de Φ est une conséquence de l'injectivité des applications $\varphi_1 : \mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P}) \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$, $\varphi_2 : \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ et $\varphi_3 : \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$.

L'injectivité de $\varphi_1 : \mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P}) \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ résulte de l'injectivité des décalages θ^r, $r \in \mathbb{Z}$, et du fait que les images par φ_1 de $\mathcal{D}_+(0, l, n, \mathcal{P})$ et de son complémentaire dans $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$ sont disjointes.

L'injectivité de $\varphi_2 : \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ est immédiate.

L'injectivité de $\varphi_3 : \mathcal{E}(\mathcal{P})^n \to \mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ résulte du fait que, si l'on ne tient pas compte des coordonnées d'un élément ξ de $\mathcal{E}(\mathcal{P})^n$ qui sont égales à 1 (et qui demeurent inchangées sous l'action de φ_3), l'action de φ_3 sur ξ consiste à effectuer une permutation circulaire des signes des coordonnées restantes.

Soit ξ un élément de $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$. Terminons la démonstration du théorème en montrant que $\Phi(\xi)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}^*(0, -l, n, \mathcal{P})$ associé à (S_n^*).

Posons $\Phi(\xi) = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$.

Il suffit d'établir l'existence d'un chemin $\Gamma^* = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de $\mathcal{C}_0^{(n)}$ tel que

$$\begin{array}{lll} & \eta_i \in \{1, -p_{\gamma_i}\} & \text{lorsque } \gamma_{i+1} = \gamma_i + 1 \\ \text{et} & & \\ & \eta_i = p_{\gamma_i} & \text{lorsque } \gamma_{i+1} = \gamma_i - 1\ . \end{array}$$

(Comme $\Phi(\xi)$ contient autant de coordonnées appartenant à $\{p_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ que ξ, un tel chemin Γ^* aboutit nécessairement à $-l$.)

Soit i_0 le minimum des indices i tels que $\eta_i \neq 1$ (i_0 existe car $l \geq 0$).

L'existence du chemin Γ^* est une conséquence des deux points suivants :

(i) $\eta_{i_0} \in \{-p_{i_0}\ ,\ p_{i_0}\}$,

(ii) pour tout i dans $\{i_0 + 1, i_0 + 2, \ldots, n - 1\}$, si $\eta_i \in \{-p_k\ ,\ p_k\}$ et si

$$j = \max\{i' \mid i_0 \leq i' \leq i - 1 \text{ et } \eta_{i'} \neq 1\}$$

alors

· ou bien $\eta_j = p_{k-(i-j)+2}$,

· ou bien $\eta_j = -p_{k-(i-j)}$.

Commençons par établir le point (i).

Compte tenu de la définition de Φ et de l'appartenance de ξ à l'ensemble $\mathcal{D}(0, l, n, \mathcal{P})$, on a

$$\xi_{n-i_0} = \xi_{n-i_0+1} = \ldots = \xi_{n-1} = 1 \quad \text{(cette condition étant vide lorsque } i_0 = 0)$$

et

$$\xi_{n-i_0-1} \in \{-p_{l+i_0+1}\ ,\ p_{l+i_0-1}\}\ .$$

Si $\xi_{n-i_0-1} = -p_{l+i_0+1}$ alors ξ est élément de $\mathcal{D}(0,l,n,\mathcal{P}) \setminus \mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})$ et il vient successivement

$$\left(\varphi_1(\xi)\right)_{n-i_0-1} = -p_{i_0}\ ,$$

$$\left(\varphi_2 \circ \varphi_1(\xi)\right)_{i_0} = -p_{i_0}$$

et

$$\left(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(\xi)\right)_{i_0} \in \{-p_{i_0}\ ,\ p_{i_0}\}\ .$$

De même, si $\xi_{n-i_0-1} = p_{l+i_0-1}$ alors ξ est élément de $\mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})$ et l'on a

$$\left(\varphi_1(\xi)\right)_{n-i_0-1} = p_{i_0}\ ,$$

$$\left(\varphi_2 \circ \varphi_1(\xi)\right)_{i_0} = p_{i_0}$$

et

$$\left(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(\xi)\right)_{i_0} \in \{-p_{i_0}\ ,\ p_{i_0}\}\ .$$

On a ainsi montré le point (i).

Passons au point (ii).

Soit donc i dans $\{i_0+1, i_0+2, \ldots, n-1\}$. On suppose que $\eta_i \in \{-p_k\ ,\ p_k\}$ et l'on note $j = \max\{i' \mid i_0 \leq i' \leq i-1 \text{ et } \eta_{i'} \neq 1\}$. Par définition de Φ, on a

$$\xi_{n-1-i} \in \{-p_{k+r}\ ,\ p_{k+r}\} \quad \text{avec } r = l-1 \text{ ou } r = l+1\ ,$$

$$\xi_{n-i} = \xi_{n-i+1} = \ldots = \xi_{n-1-j-1} = 1\ .$$

Il en résulte que si $\xi_{n-1-i} = -p_{k+r}$ alors

$$\xi_{n-1-j} \in \{-p_{k+r-(i-j)}\ ,\ p_{k+r-(i-j)}\}\ ,$$

et donc

$$\eta_j = -p_{k-(i-j)}\ .$$

Si maintenant $\xi_{n-1-i} = p_{k+r}$ alors

$$\xi_{n-1-j} \in \{-p_{k+r-(i-j)+2}\ ,\ p_{k+r-(i-j)+2}\}\ ,$$

et donc

$$\eta_j = p_{k-(i-j)+2}\ .$$

•

Les propositions 1 et 3 donnent immédiatement le

Corollaire 1 *Soit (S_n) une chaîne de Markov aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$ dont la probabilité de transition est donnée par $\mathcal{P} : k \in \mathbb{Z} \mapsto p_k \in [0,1]$.*

Pour tout entier naturel n et tout élément l de $\mathbb{Z}_+$, on a l'égalité

$$\mathbb{P}[S_n^* = -l \mid S_0^* = 0] = \sum_{\xi \in \mathcal{D}(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} (\Phi(\xi))_i \ .$$

5. Preuve du théorème 1

Compte tenu de la définition de Φ, on a, pour ξ dans $\mathcal{D}(0,l,n,\mathcal{P})$,

$$\prod_{i=0}^{n-1} (\Phi(\xi))_i = \prod_{i=0}^{n-1} \theta^r (\xi_i)$$

avec $r = -l+1$ si ξ est dans $\mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})$ et $r = -l-1$ dans le cas contraire.

Ainsi, grâce au corollaire 1 et aux propositions 1 et 2, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S_n^* = -l \mid S_0^* = 0] &= \sum_{\xi \in \mathcal{D}(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} (\Phi(\xi))_i \\
&= \theta^{-l+1} \left(\sum_{\xi \in \mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \xi_i \right) + \theta^{-l-1} \left(\sum_{\xi \in \mathcal{D}(0,l,n,\mathcal{P}) \setminus \mathcal{D}_+(0,l,n,\mathcal{P})} \prod_{i=0}^{n-1} \xi_i \right) \\
&= \theta^{-l+1} \left(\mathbb{P}[S_n \geq l \mid S_0 = 0] \right) + \theta^{-l-1} \left(\mathbb{P}[S_n = l \mid S_0 = 0] - \mathbb{P}[S_n \geq l \mid S_0 = 0] \right) \\
&= \theta^{-l+1} \left(\mathbb{P}[S_n \geq l \mid S_0 = 0] \right) - \theta^{-l-1} \left(\mathbb{P}[S_n > l \mid S_0 = 0] \right) \\
&= \theta^{-l+1} \left(\mathbb{P}[S_n = l \mid S_0 = 0] \right) \\
&+ \theta^{-l+1} \left(\mathbb{P}[S_n > l \mid S_0 = 0] \right) - \theta^{-l-1} \left(\mathbb{P}[S_n > l \mid S_0 = 0] \right) \ .
\end{aligned}$$

Dans les calculs ci-dessus, les probabilités sont considérées comme des polynômes en les indéterminées p_k, $k \in \mathbb{Z}$, et les décalages θ^{-l-1} et θ^{-l+1} ont été étendus en des endomorphismes de l'algèbre $\mathbb{Z}[p_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}]$.

On conclut en remarquant que, pour tous r, s dans $\mathbb{Z}$, on a

$$\theta^r \left(\mathbb{P}[S_n = s \mid S_0 = 0] \right) = \mathbb{P}[S_n = s + r \mid S_0 = r] \ .$$

•

6. Application aux marches aléatoires en milieu aléatoire stationnaire sur $\mathbb{Z}$

A présent, on appelle *conductance* entre deux entiers successifs k et $k+1$ tout réel strictement positif $c(k, k+1)$; l'inverse $r(k, k+1)$ de $c(k, k+1)$ étant la *résistance* entre k et $k+1$.

Une famille $(c(k, k+1))_{k \in Z}$ de conductances étant donnée, on peut lui associer une chaîne de Markov $(S_n)_{n \geq 0}$ se déplaçant aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$ et dont les probabilités de transition sont proportionnelles à ces conductances. On a ainsi :

$$p_k := \mathbb{P}[S_{n+1} = k+1 \mid S_n = k] = \frac{c(k, k+1)}{\overline{c}(k)}$$

et

$$q_k := \mathbb{P}[S_{n+1} = k-1 \mid S_n = k] = \frac{c(k-1,k)}{\overline{c}(k)} \ ,$$

où l'on a posé $\overline{c}(k) := c(k-1,k) + c(k,k+1)$.

Lorsque les conductances sont obtenues comme réalisations d'une suite stationnaire et ergodique de variables aléatoires, strictement positives, intégrables ainsi que leurs inverses, on peut montrer un théorème limite central pour $(S_n)_{n\geq 0}$ en utilisant la méthode de martingales introduite dans un tel contexte par Kozlov ([5]). En fait, s'il existe un espace probabilisé, ergodique et inversible $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \theta)$ (voir [6] par exemple), et une fonction mesurable $c : \Omega \to]0, +\infty[$ telle que les conductances soient données par

$$c(k,k+1)(\omega) := c(\theta^k \omega) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ , \ \omega \in \Omega \ ,$$

alors, pour μ-presque tout ω, la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi normale centrée dont on peut expliciter la variance :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\int c \ \mathrm{d}m \ \int \frac{1}{c} \ \mathrm{d}m} \ ;$$

avec la convention $1/+\infty = 0$. (Voir [1] et [2] pour une telle expression de la variance.)

On voit ainsi apparaître asymptotiquement une symétrie entre c et $1/c$. Dans le corollaire suivant, on montre que cette symétrie est en fait présente à chaque instant en moyenne relativement aux environnements.

Lorsqu'un environnement de conductances est fixé, si l'on fait jouer aux résistances le rôle des conductances, on passe d'une chaîne de Markov régie par des probabilités de transition proportionnelles aux conductances à une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont inversement proportionnelles aux conductances. On passe donc de la chaîne de Markov (S_n) à la chaîne duale (S_n^*) et le théorème 1 s'applique. Il en résulte en particulier le résultat suivant par invariance de la probabilité μ sous l'action de θ.

Théorème 2 *En μ-moyenne relativement aux environnements de conductances, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n coïncide avec la loi de $-S_n^*$.*

D'où l'on déduit le

Corollaire 2 *Pour tout entier naturel n, on a l'égalité*

$$\int_\Omega \mathbb{E}_0^\omega(S_n^2) \ \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega \mathbb{E}_0^\omega\left((S_n^*)^2\right) \ \mathrm{d}\mu(\omega) \ ,$$

où $\mathbb{E}_0^\omega$ désigne l'espérance relativement à l'aléa de la chaîne de Markov $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de 0, à environnement de conductances ω fixé.

Remarque Seule la stationnarité de la suite des probabilités de transition p_k est utilisée pour obtenir les deux résultats précédents. Ces derniers se généralisent donc aux marches aléatoires aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$ qui évoluent dans un milieu aléatoire donné par une famille stationnaire $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $]0,1[$. La marche aléatoire de Sinaï ([7]) en est un exemple.

References

[1] De Masi A., Ferrari P. A., Goldstein S., Wick W. D. (1989) An invariance principle for reversible Markov processes. Applications to random motions in random environments *J. Stat. Phys.* **55**, 787-855.

[2] Depauw J., Derrien J.-M. (2009) Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$ *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **347**, 401-406

[3] Derriennic Y. (1999) Sur la récurrence des marches aléatoires unidimensionnelles en environnement aléatoire *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1) 65-70.

[4] Dette H., Fill J. A., Pitman J., Studden W. J. (1997) Wall and Siegmund duality relations for birth and death chains with reflecting barrier *J. Theoret. Probab.* **10** (2) 349-374.

[5] Kozlov S.M. (1985) The method of averaging and walks in inhomogeneous environments *Russ. Math. Surv.* **40**, 73-145 ; translation from *Usp. Mat. Nauk* **40**, 61-120.

[6] Petersen K. (1983) *Ergodic theory* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2. Cambridge University Press, Cambridge.

[7] Sinai, Ya G. (1982) The limiting behavior of a one-dimensional random walk in random medium (English translation) *Th. Probab. Appl.* **27**, 256-268